4 Eksponential- og logaritmeregning

4.2 Potenser med brøkeksponent

> $restart:$

Maple hjelper deg med regnereglene for potenser.

> $a^n\, a^m = simplify(a^n\, a^m)$

$$a^n\, a^m = a^{m+n}$$

> $\dfrac{a^n}{a^m} = simplify\left(\dfrac{a^n}{a^m}\right)$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

> $(a^n)^m = simplify((a^n)^m, symbolic)$

$$(a^n)^m = a^{n\,m}$$

> $(a\, b)^n = simplify((a\, b)^n, symbolic)$

$$(a\, b)^n = a^n\, b^n$$

> $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = simplify\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^n, symbolic\right)$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = a^n\, b^{-n}$$

eller

> $expand(\%)$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Eksempel 4.2.1

Regn ut

$\sqrt[4]{16^3}$, $32^{0.6}$, $243^{\frac{4}{10}}$

Løsning

> $16^{\frac{3}{4}}$

$$16^{3/4}$$

Svaret regnes ikke ut før vi forenkler uttrykket med simplify.

> $simplify(\%)$

$$8$$

> $32^{0.6}$

$$8.000000000$$

Her kommer svaret med en gang som et desimaltall, fordi eksponenten er et desimaltall.

> $243^{0.4}$

$$9.000000000$$

Erstatter vi eksponenten med en brøk, får vi

> $243^{\frac{4}{10}}$

$$243^{2/5}$$

> *simplify*(%)

$$9$$

kan skrives som en potens av 3 ved hjelp av ifactor.

> $243 = ifactor(243)$

$$243 = (3)^5$$

Eksempel 4.2.2

a) Tegn grafene til $f(x) = 3^x$ og $g(x) = x + 2$
i samme koordinatsystem

b) Finn skjæringspunktene.

Løsning

a)

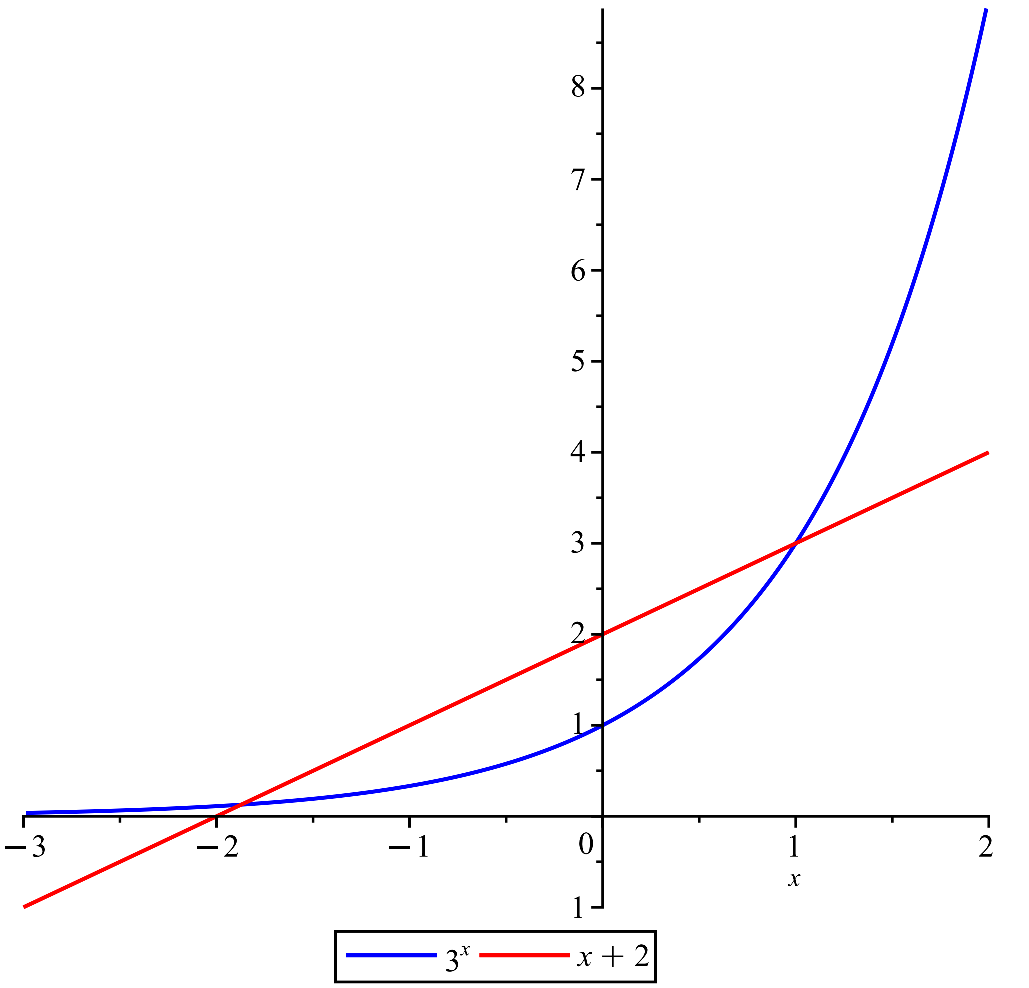
Vi definerer og som funksjoner ved

> $f := x \mapsto 3^x;\ g := x \mapsto x + 2$

$$f := x \mapsto 3^x$$

$$g := x \mapsto x + 2$$

> $plot([f(x), g(x)], x = -3..2, color = [blue, red], legend = [typeset(f(x)), typeset(g(x))])$



Klikker vi på figuren og plasserer musmarkøren på ett av skjæringspunktene, får vi tilnærmet koordinatene i det hvite vinduet på tegnlinjalen.

b)

Vi kan finne en eksakt løsning av ligningen, men den ser komplisert ut.

> $f(x) = g(x)$

$$3^x = x + 2$$

> $solve(\%, x)$

$$-\frac{\mathrm{LambertW}\left(-\frac{\ln(3)}{9}\right) + 2\ln(3)}{\ln(3)}, -\frac{\mathrm{LambertW}\left(-1, -\frac{\ln(3)}{9}\right) + 2\ln(3)}{\ln(3)}$$

> $evalf(\%)$

$$-1.872130576, 0.9999999991$$

Men Maple kan løse alle typer av ligninger (numerisk, med desimaltall) ved kommadoen fsolve.

- fsolve($ligning$, $x = x_1 .. x_2$) løser *ligning* med hensyn på den variable x innen det definerte området

$x_1 \le x \le x_2$

> $x[1] = fsolve(f(x) = g(x), x = -3 .. -1)$

$$x_1 = -1.872130575$$

> $x[2] = fsolve(f(x) = g(x), x = 0 .. 2)$

$$x_2 = 1.000000000$$

>

4.3 Briggske logaritmer

Briggske logaritmer har grunntallet 10.

- log[a](x) berenger logaritmen til x med a som grunntall

> $alias(lg = lg)$:

> $lg(0.001) = \log[10](0.001)$

$$lg(0.001) = -3.000000000$$

> $lg(0.01) = \log[10](0.01)$

$$lg(0.01) = -2.000000000$$

> $lg(1) = \log[10](1)$

$$lg(1) = 0$$

> $lg(100) = \log[10](100)$

$$lg(100) = 2$$

Vi får en bedre oversikt ved bruk av seq-kommandoen

> $L := seq\left(\left[lg(10^n) = simplify\left(\log_{10}(10^n)\right)\right], n = -4..4\right)$

$$L := \left[lg\left(\frac{1}{10000}\right) = -4\right], \left[lg\left(\frac{1}{1000}\right) = -3\right], \left[lg\left(\frac{1}{100}\right) = -2\right], \left[lg\left(\frac{1}{10}\right) = -1\right], [lg(1) = 0], [lg(10) = 1], [lg(100) = 2], [lg(1000) = 3], [lg(10000) = 4]$$

eller på tabellform

> $Matrix([L])$

$$\left[\begin{array}{c} lg\left(\frac{1}{10000}\right) = -4 \\ \\ lg\left(\frac{1}{1000}\right) = -3 \\ \\ lg\left(\frac{1}{100}\right) = -2 \\ \\ lg\left(\frac{1}{10}\right) = -1 \\ \\ lg(1) = 0 \\ \\ lg(10) = 1 \\ \\ lg(100) = 2 \\ \\ lg(1000) = 3 \\ \\ lg(10000) = 4 \end{array}\right]$$

Eksempel 4.3.1

Finn tilnærmingsverdier for logaritmene til 2.5, 1.05, 1.6, 3.75, 109.36, 106.04.

Løsning

Vi skriver tallene på listeform.

> $L := [2.5, 1.05, 1.6, 3.75, 109.36, 106.04]$

$$L := [2.5, 1.05, 1.6, 3.75, 109.36, 106.04]$$

Nå bruker vi map-kommandoen for å få tatt logaritmen til alle tallene i listen i ett "jafs".
Kommandoen kan forståes slik: **anvend** (map) logaritmen med grunntall ti på tallene i listen L

> $map(\log[10], L)$

$$[0.3979400087, 0.02118929907, 0.2041199827, 0.5740312677, 2.038858502, 2.025469719]$$

eller hvis vi ønsker å ha med litt tekst i form av logaritmetegnet lg.

> $g := x \mapsto lg(x) = \log[10](x)$

$$g := x \mapsto lg(x) = \log_{10}(x)$$

Vi anvender så funksjonen g på hvert element i listen L.

> $map(g, L)$

$[lg(2.5) = 0.3979400087, lg(1.05) = 0.02118929907, lg(1.6) = 0.2041199827, lg(3.75) = 0.5740312677, lg(109.36) = 2.038858502, lg(106.04) = 2.025469719]$

>

4.4 Naturlige logaritmer

Logaritmer med grunntallet e = 2.718... kalles naturlige logaritmer.

- $\exp(x)$ er eksponentialfunksjonen
- $\ln(x)$ er den naturlige logaritmefunksjonen

Grunntallet i det naturlige logaritmesystemet er

> $\exp(1.)$

$$2.718281828$$

Tar vi grenseverdien

> $Limit\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t, t=\infty\right) = limit\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t, t=\infty\right)$

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

får vi grunntallet e. Med 20 siffer får vi

> $e = evalf(\exp(1), 20)$

$$e = 2.7182818284590452354$$

Eksempel 4.4.1

Regn ut $\ln(e^2)$, $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$, $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$

Løsning

> $'\ln(e^2)' = \ln(e^2)$

$$\ln(e^2) = 2$$

> $'\ln\left(\frac{5}{4}\right)' = \ln\left(\frac{5.}{4}\right)$

$$\ln\left(\frac{5}{4}\right) = 0.2231435513$$

> $'\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)' = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$

$$\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2$$

Eksempel 4.4.2

Finn x når $\ln(x) = 2$, $\ln(x) = -3$, $\ln(x) = \frac{1}{2}$, $\ln(x) = 1$

Løsning

Vi skriver funksjonene på listeform.

> $L := \left[\ln(x)=2, \ln(x)=-3, \ln(x)=\frac{1}{2}, \ln(x)=1\right]$

$$L := \left[\ln(x)=2, \ln(x)=-3, \ln(x)=\frac{1}{2}, \ln(x)=1\right]$$

Så bruker vi den nyttige map-kommandoen kombinert med solve for å løse ligningene samtidig.

> $map(solve, L, \{x\})$

$$\left[\{x=e^2\}, \left\{x=\frac{1}{e^3}\right\}, \left\{x=e^{\frac{1}{2}}\right\}, \{x=e\}\right]$$

>

4.5 Regning med logaritmer

Logaritmereglene for Briggske logaritmer er de samme som logaritmereglene for naturlige logaritmer. Sammenhengen mellom Briggske logaritmer og naturlige logaritmer er gitt ved

> $restart:$

> $'\log_{10}(x)'=\log_{10}(x)$

$$lg(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Vi ser at den Briggske logaritmen til x er lik den naturlige logaritmen til x dividert med den naturlige logaritmen til grunntallet 10. Reglene som følger er derfor gitt ved naturlige logaritmer.

> $\ln(x\,y)=simplify(\ln(x\,y), symbolic)$

$$\ln(x\,y)=\ln(x)+\ln(y)$$

> $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=simplify\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right), symbolic\right)$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$$

> $\ln(x^p)=simplify(\ln(x^p), symbolic)$

$$\ln(x^p)=p\ln(x)$$

Eksempel 4.5.1

Finn x av ligningene

a) $\ln(x)-\ln(x-1)=\frac{1}{10}$

b) $\log_{10}(x^2)-\log_{10}(x^2-1)=2$

Løsning

a)

> $lign := \ln(x)-\ln(x-1)=\frac{1}{10} : \%$

$$\ln(x)-\ln(x-1)=\frac{1}{10}$$

Logaritmene kan trekkes sammen til

> $combine(\%, symbolic)$

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{10}$$

Da blir

> $map(\exp, \%)$

$$\frac{x}{x-1} = e^{\frac{1}{10}}$$

Vi ganger opp med $(x-1)$ og får

> $\%\,(x-1)$

$$x = (x-1)\,e^{\frac{1}{10}}$$

> $expand(\%)$

$$x = e^{\frac{1}{10}}\,x - e^{\frac{1}{10}}$$

Vi flytter over på venstre side og trekker sammen.

> $lhs(\%) - rhs(\%) = 0$

$$x - e^{\frac{1}{10}}\,x + e^{\frac{1}{10}} = 0$$

> $collect(\%, x)$

$$\left(-e^{\frac{1}{10}} + 1\right)x + e^{\frac{1}{10}} = 0$$

Så løser vi ligningen med hensyn på .

> $isolate(\%, x)$

$$x = -\frac{e^{\frac{1}{10}}}{-e^{\frac{1}{10}} + 1}$$

Med desimaltall blir svaret

> $evalf(\%)$

$$x = 10.50833195$$

Direkte beregning

> $solve(lign, \{x\})$

$$\left\{x = \frac{e^{\frac{1}{10}}}{-1 + e^{\frac{1}{10}}}\right\}$$

> $evalf(\%)$

$$\{x = 10.50833195\}$$

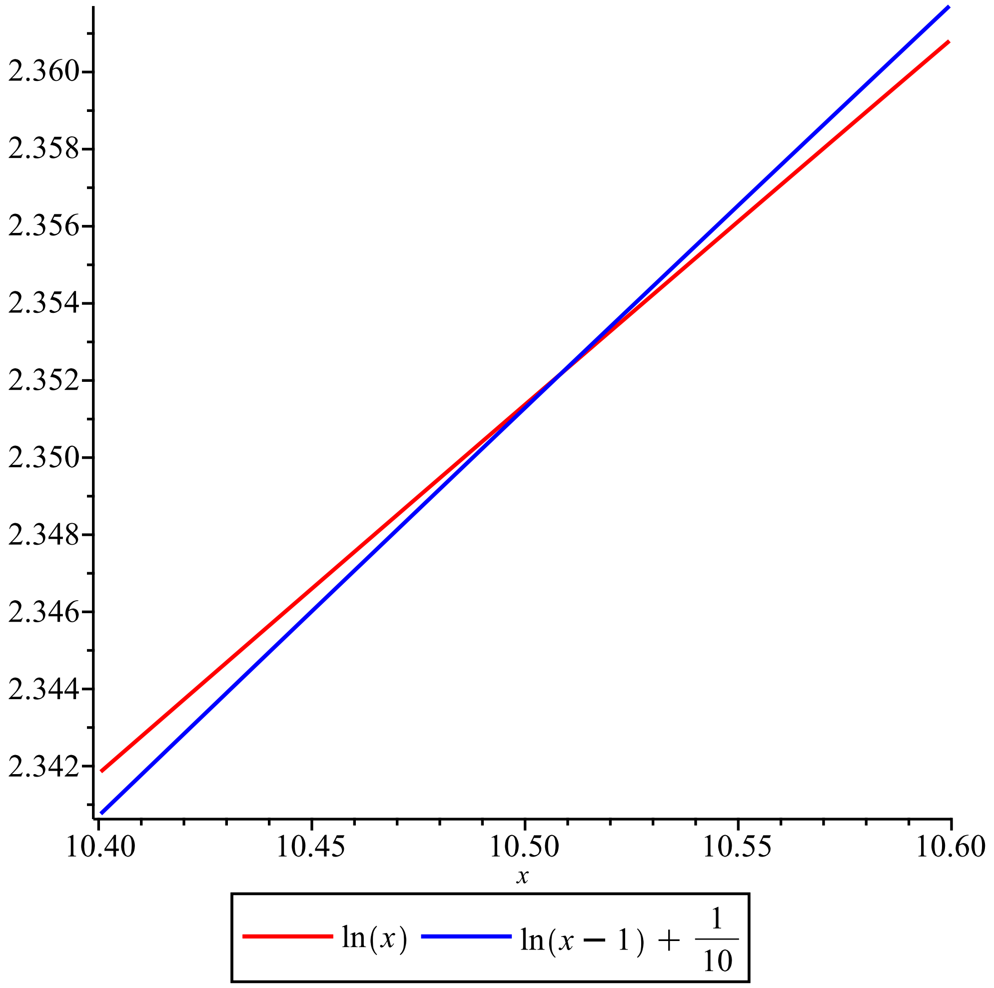
Vi plotter

> $f := x \mapsto \ln(x):$
$g := x \mapsto \ln(x-1) + \frac{1}{10}:$
$'f(x)' = f(x), 'g(x)' = g(x)$

$$f(x) = \ln(x), g(x) = \ln(x-1) + \frac{1}{10}$$

i samme koordinatsystem i området rundt løsningen.

> $plot([f(x), g(x)], x = 10.4..10.6, color = [red, blue], legend = [typeset(f(x)), typeset(g(x))])$



b)

> $lign := \log_{10}(x^2) - \log_{10}\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 2 : \%$

$$\frac{\ln(x^2)}{\ln(10)} - \frac{\ln\left(\frac{x}{2} - 1\right)}{\ln(10)} = 2$$

Vi ganger opp med $\ln(10)$ og lar Maple forenkle uttrykket.

> $simplify(lign\ \ln(10))$

$$\ln(x^2) + \ln(2) - \ln(x - 2) = 2\ln(2) + 2\ln(5)$$

som gir

> $combine(\%, symbolic)$

$$\ln\left(\frac{2x^2}{x - 2}\right) = 2\ln(10)$$

Da ender vi opp med

> $map(\exp, \%)$

$$\frac{2x^2}{x - 2} = 100$$

Vi ganger opp med $(x-2)$ og løser andregradsligningen med hensyn på x .

> $\%\,(x-2)$

$$2\,x^2 = 100\,x - 200$$

> $lhs(\%) - rhs(\%) = 0$

$$2\,x^2 - 100\,x + 200 = 0$$

> $løsn := solve(\%, \{x\}) : \%$

$$\left\{x = 25 + 5\sqrt{21}\right\}, \left\{x = 25 - 5\sqrt{21}\right\}$$

> $evalf(løsn)$

$$\{x = 47.91287848\}, \{x = 2.08712152\}$$

> $x1, x2 := 47.9, 2.08 :$

Kontroll

> $map(subs, [løsn], lign)$

$$\left[\frac{\ln\left(\left(25+5\sqrt{21}\right)^2\right)}{\ln(10)} - \frac{\ln\left(\frac{23}{2} + \frac{5\sqrt{21}}{2}\right)}{\ln(10)} = 2, \frac{\ln\left(\left(25-5\sqrt{21}\right)^2\right)}{\ln(10)} - \frac{\ln\left(\frac{23}{2} - \frac{5\sqrt{21}}{2}\right)}{\ln(10)} = 2\right]$$

> $simplify(\%)$

$$[2 = 2, 2 = 2]$$

Vi ser at løsningene stemmer.

Direkte beregning

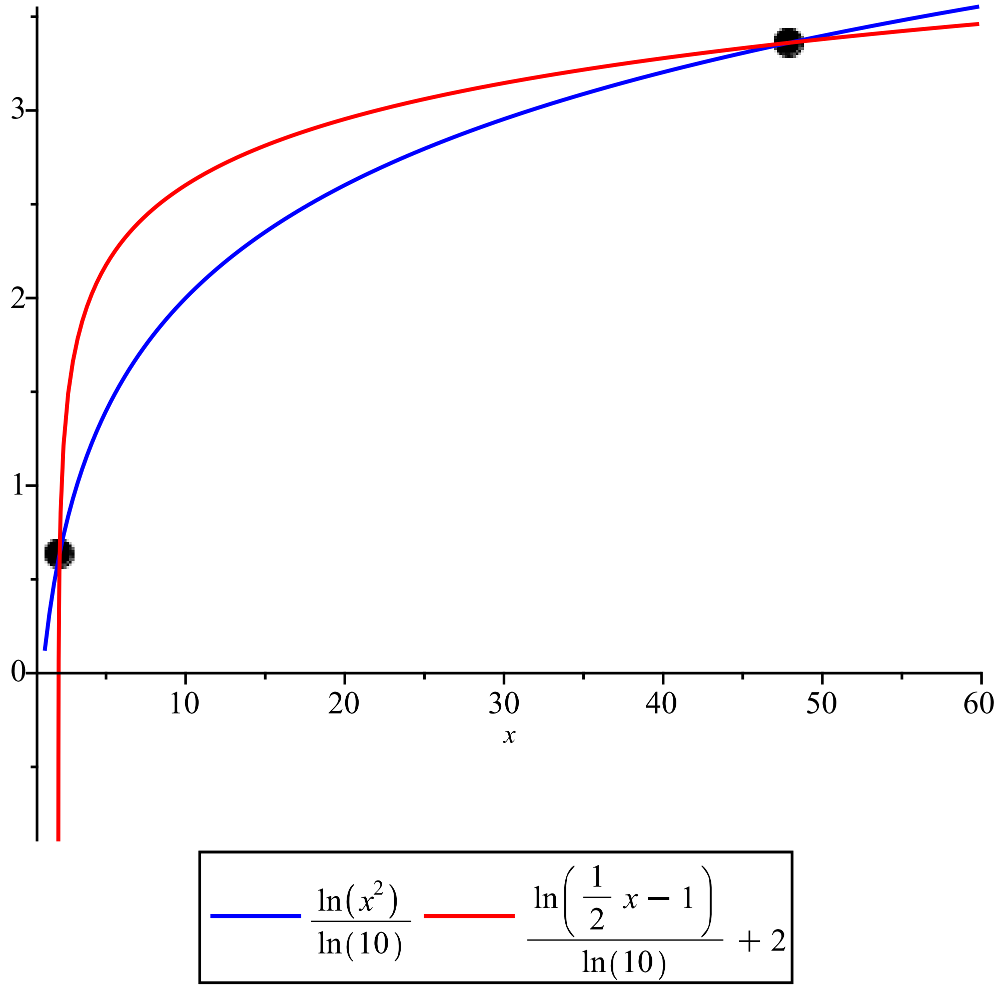
> $solve(lign, \{x\})$

$$\left\{x = 25 - 5\sqrt{21}\right\}, \left\{x = 25 + 5\sqrt{21}\right\}$$

> $f := x \mapsto \log_{10}(x^2) : g := x \mapsto \log_{10}\left(\frac{x}{2} - 1\right) + 2 :$

> $p1 := pointplot([[x1, f(x1)], [x2, f(x2)]], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, color = black) :$

> $p2 := plot([f(x), g(x)], x = 1..60, color = [blue, red], legend = [typeset(f(x)), typeset(g(x))]) :$
> $display(p1, p2)$



4.6 Eksponentialligninger

Eksponentialligninger er ligninger der den ukjente finnes som eksponent.

Eksempel 4.6.1

Løs ligningen $5^{(x+2)} = 14$.

Løsning

> $lign := 5^{x+2} = 14 : \%$

$$5^{x+2} = 14$$

Vi tar logaritmen på begge sider av likhetstegnet.

> $map(\ln, lign)$

$$\ln(5^{x+2}) = \ln(14)$$

> $simplify(\%, symbolic)$

$$(x+2)\ln(5) = \ln(2) + \ln(7)$$

Ligningen kan løses med hensyn på .

> $isolate(\%, x)$

$$x = \frac{\ln(2) + \ln(7)}{\ln(5)} - 2$$

> $combine(\%)$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{14}{25}\right)}{\ln(5)}$$

> *evalf*(%)

$$x = -0.3602614869$$

Kontroll

> *subs*(%, *lign*)

$$14.00000000 = 14$$

Direkte beregning

> *solve*(*lign*, {*x*})

$$\left\{x = -\frac{2\ln(5) - \ln(14)}{\ln(5)}\right\}$$

> *evalf*(%)

$$\{x = -0.3602614861\}$$

Eksempel 4.6.4

Antall radioaktive karbonatomer som en funksjon av tiden i år er gitt ved
$N(t) = 9.38 \cdot 10^{18}\, e^{0.000126\,t}$
Plott grafen til $N(t)$ og beregn halveringstiden.

Løsning

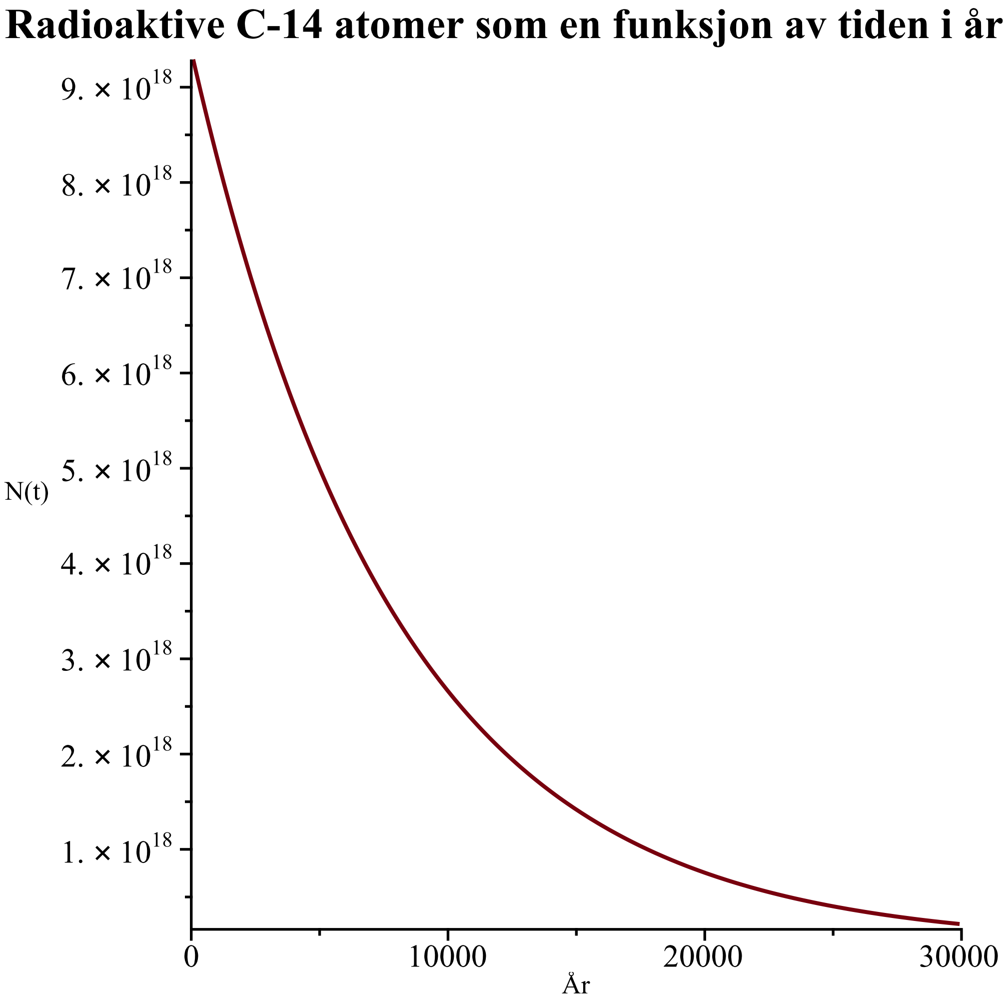
> $N := t \rightarrow 9.38\ 10^{18}\ \mathrm{e}^{-0.000126\,t}$: $'N(t)' = N(t)$

$$N(t) = 9.380000000 \times 10^{18}\ \mathrm{e}^{-0.000126\,t}$$

Grafen til $N(t)$

> *p1* := *plot*($N(t)$, $t = 0..30000$, *title* = "Radioaktive C-14 atomer som en funksjon av tiden i år", *titlefont* = [*TIMES*, *BOLD*, 16], *labels* = ["År", "N(t)"]) :

%



Halveringstiden er tiden som medgår inntil antallet atomer er halvert. Da får vi

$> N(t) = \frac{9.38\ 10^{18}}{2}$

$$9.380000000 \times 10^{18}\, e^{-0.000126\, t} = 4.690000000 \times 10^{18}$$

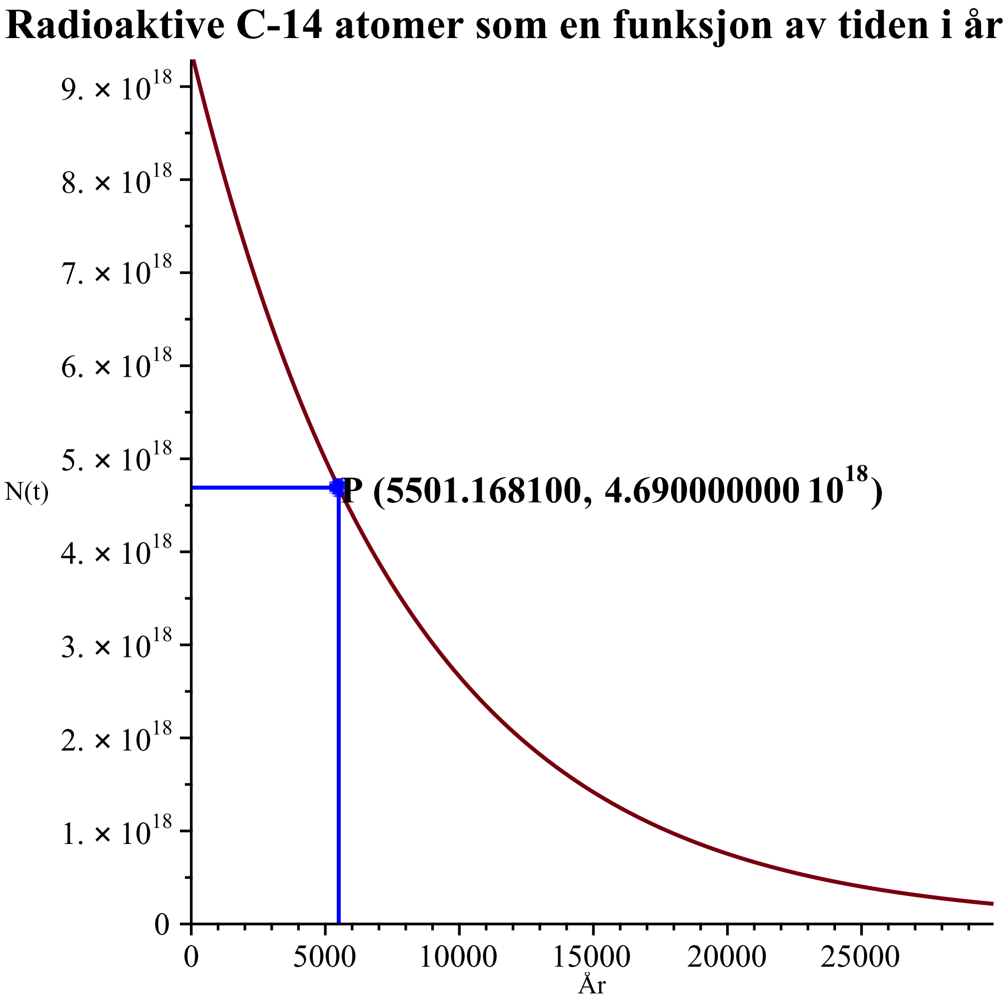
$> solve(\%, \{t\})$

$$\{t = 5501.168100\}$$

$> t1 := subs(\%, t) :$

$> p2 := pointplot([t1, N(t1)], symbol = solidcircle, symbolsize = 14, color = blue) :$
$p3 := plot([[t, N(t1), t = 0..t1], [t1, y, y = 0..N(t1)]], color = blue) : p4 := textplot([t1, N(t1), typeset(\text{"P (", } t1, \text{", ", } N(t1), \text{")"})], align = right, font = [TIMES, BOLD, 14]) :$

$> display(p1, p2, p3, p4)$


Radioaktive C-14 atomer som en funksjon av tiden i år
9. × 10^18
8. × 10^18
7. × 10^18
6. × 10^18
5. × 10^18
N(t)
P (5501.168100, 4.690000000 10^18)
4. × 10^18
3. × 10^18
2. × 10^18
1. × 10^18
0
0
5000
10000
15000
20000
25000
År

>